氏名	島倉紀夫（しまくらのりお）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第288号
学位授与の日付	昭和45年1月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**Problèmes aux limites variationnels du type elliptique** （楕円型変分的境界値問題）
論文調査委員	（主査）教授 溝畑茂　教授 吉田耕作　教授 山口昌哉

論文内容の要旨

ΩをユークリッドR空間 R^n の有界開集合とし，Γ をΩのなめらかな境界とする。さらにAを$\overline{\Omega}$で定義された2m階の楕円型作用素，すなわち

$$\sum_{|\nu|\leq 2m} A_\nu(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu,$$

$$\sum_{|\nu|=2m} A(x)\xi^\nu \neq o \quad (\xi\neq o)$$

とする。Aに対する境界値問題とは，$f(x)$ を与えて

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(x)$$

$$B_r\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\,|_\Gamma=o,\quad r\in R$$

を満足する$u(x)$を求める問題である。ここでBrの添字rは，境界微分作用素Brの微分の階数（order）をあらわすものとし，Γは各Brに対して non-characteristic であるとする。さらにRは {0, 1, 2, ……, 2m—1} の部分集合であるとする。この問題を L^2 のわくでとり扱う手法は Dirichlet の原理が出発点となって考察されてきた。すなわち，Aが2階の場合，

$$A=-\sum a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x),\quad \sum a_{ij}\xi_i\xi_j\geqq\delta|\xi|^2$$

$(\delta>o)$，境界条件が Dirichlet, Neumann の場合，

$$Re(Au,\ u)\geqq\delta\|u\|^2_{1,\Omega}-c\|u\|^2$$

がなりたつことが重要である。ここで δ, c は適当な正の定数である。この不等式は2m階の楕円型作用素Aに対して，いわゆる Dirichlet 条件 $u|_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial n}/_\Gamma=\cdots=\frac{\partial^{m-1}}{\partial_n{}^{m-1}}u/_\Gamma=o$ のもとでもなりたつ。すなわち，

(2) $Re(Au,\ u)\geq\delta'\|u\|^2_{m,\Omega}-c'\|u\|^2$

がなりたつことが Gårding によって示された（1951年）。ところで一般境界値問題の場合には，このよう

な拡張が一般には成功せず，1959年以降からはこれに代って Lopatinski の条件をもとにした着想によって新しい方法が開発されてきた。しかしその方法は簡単なものとはいえない状態である。このような状態のもとで申請者は主論文において Lopatinski の条件をみたす $\{A, B_r\}$ のうちで，変分的に解けるものはどのような条件をみたしているものであるかを考察し，興味ある結果に到達している。

申請者はまず上記の(1)が変分的である場合をとり上げている。すなわち $B_r u=o$, $r \epsilon R$, みたす任意の $u(x)$ に対して，適当な正の定数 β をとれば，

$$Re((A+\beta)u,\ u)\geq o$$

がなりたつときである。つぎの結果がえられている。Sを $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, 2m-1\}$ に対する R の補集合とすれば，Aが変分的 (variational) であるためには，関係式

$$S=\{2m\text{-}1\text{-}r\ ;\ r\epsilon R\}$$

がなりたつことが必要である。

つづいて(1)が変分的であるのみならず，任意の$(2m-1)$ 階の微分作用素Kに対して，$A+K$もまた変分的である場合，(1)は強変分的 (stably variational) であるとよぶことにすれば，(1)がそうであるためには，添字の集合Rはつぎの $(m+1)$ 個の場合，

$$(3)\quad Rj=\{0.\ 1, \cdots\cdots, m-j-1,\ m,\ m+1, \cdots\cdots m+j-1\}$$
$$(j=0, 1, 2, \cdots\cdots, m)$$

の何れかでなくてはならないことが示されている。つづいて，(3)の仮定のもとで $\{A,\ B_r\}$ が強変分的であるための十分条件が提出されている。その条件は A, B_r から直接に計算されるエルミート行列 Bj の正定値性として定式化されている。つづいて，この場合には，$B_r u=o$, $r\epsilon R$, をみたす任意の$u(x)$ に対して(2)と同じ形の不等式がなりたつことが示されている。

申請者の提出した Bj の正定値性という条件は全く新しいものであり，注目すべきものと思われる。なおこの条件は主論文において必要条件に近いものであることが強調されているが，参考論文1においてその事実が示されている。すなわち，低階の項として位数 $(2m-1)$ 以下の pseudo-differential operator を許すとすれば，必要な条件となる。

参考論文2は境界で退化する楕円型作用素に対する一般境界値問題を取り扱っている。この方面での一般的の考察は，この論文がおそらく最初のものであろう。この問題のたて方，考察の進め方に若干の疑問がないわけではないが，今後のこの方面の研究の出発点として大きな意義があるように思われる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

主論文にある諸定理はいずれも簡単な形にまとめられたものであるが，その証明は簡単なものではなく，函数解析学的な種々の手法を駆使したものである。

考察は$y>o$を独立変数とする。

$$A=\sum_{k=o}^{2m}\alpha_k\left(i\frac{d}{dy}\right)^k$$

$$B_r=\left(i\frac{d}{dy}\right)^r-\sum_{\substack{\rho<r\\ \rho\epsilon R}}Br\rho\left(i\frac{d}{dy}\right)^\rho$$

という形の定数係数の微分方程式から出発している。$\sum_{k=o}^{2m}\alpha_k z^k+\lambda=o$ の根で $Imz>o$ のものを，$\tau_1(\lambda)$, ……，$\tau_m(\lambda)$ とし，

$$A_+^\lambda=\pi_{l=1}^{m}\left(i\frac{d}{dy}+\tau_l(\lambda)\right)$$

とおく。そこで $R=Rj$ とし，$u(y)$，$v(y)\epsilon D〔A〕$ に対して双２次形式

$$B_j(\lambda)〔u.v〕=\frac{1}{2}\{((A+\lambda)u.v)+u,\ (A+\lambda)v)\}-(A_+^\lambda+u,\ A_+^\lambda+v)$$

と考えると，一般に $\vec{f}_{(j)}={}^t\left((i\frac{d}{dy})^{m-1}f(o),\cdots\cdots,\ (i\frac{d}{dy})^{m-j}f(o)\right)$

とおけば，

$$B_j(\lambda)〔u.v〕=(B_j(\lambda)\vec{u}_{(j)},\ \vec{v}_{(j)})$$

とかけ，石辺の $B_j(\lambda)$ は orderj のエルミート行列になることが示される。さらに $B_j(\lambda)$ は適当な重みをつけて，$\lambda\to\infty$とすると，ある定数マトリックス $\tilde{B}_j$ に近づくが，$\tilde{B}_j$ が正定値であることが示されている。この事実が考察の基礎になっている。これらの着想は新しく，誠に興味あるものである。この事実の証明自体は相当困難であり，これを予想した申請者の洞察力のすぐれていることを示している。

参考論文の３編はいずれも興味のあるもので，とくに参考論文２は今後の発展が期待されるものである。

よって，申請論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。